第3卷 第2期
1998年2月

中国图象图形学报
Journal of Image and Graphics

Vol. 3, No. 2
Feb. 1998

图象分析中的松驰标记法

戴剑彬 张大力

(清华大学自动化系,北京 100084)

摘 要 松驰标记法是指对图中的每个目标进行标记指派,利用先验上下文信息进行迭代,寻求最大协调标记集的一种方法。此文推导了一种新的概率松驰法,分析了随机松驰法的迭代公式,利用马尔科夫随机场(MRF)与吉布斯(Gibbs)分布的等价性来计算局部特性概率,用最大熵(ME)原理对条件邻域概率进行估计。最后对概率松驰法和随机松驰法进行了比较。

关键词 概率松驰,随机松驰,马尔科夫随机场,吉布斯分布,最大熵

1 引 言

松驰标记法是一种利用先验上下文信息对目标进行标记指派的方法。上下文信息是由目标间的兼容性给出。迭代算法不断更新每一指派标记的概率测度,以至收敛到最大协调标记集。松驰标记法已被应用于图象分析中的各类问题,如图象恢复,图象增强,边缘检测,象素分类,图象分割等等。

用$G=(V,E)$表示一任意的图,其中$V=\{v_1, v_2,\cdots,v_n\}$是目标集,$E$是目标之间的邻接关系。$\Lambda=\{\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m\}$是指派给目标的标记集。用随机变量$x_i$表示目标$v_i$的标记,并记矢量$\boldsymbol{X}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$。邻域$N_i$指目标$v_i$的近邻点集合,即$N_i=\{v_j/(i,j)\in E,i\neq j\}$。每一目标的状态是不能被直接观测到的,$y_i=h(x_i,u_i)$是带噪声的观测值,其中$u_i$是相互独立,并独立于$x_i$的观测噪声。我们用$\boldsymbol{Y}$和$\boldsymbol{Y}_i$分别表示观测矢量$\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$和$\{y_1,\cdots,y_{i-1},y_{i+1},\cdots,y_n\}$。现在,松驰标记法问题可以描述如下:已知先验概率$P(y_i/x_i=\lambda_j)$,$x_i\in\boldsymbol{X}$,$j\in\Lambda$,求目标集的标记指派,使后验概率$P(x_i=\lambda_{x_i}/y_i)$最大。

松驰标记法最早是由Rosenfeld等[1]提出。Hummel和Zuker[2]给出了一致性的定义,提出了投影梯度更新算法,并讨论了公式的局部收敛性问题,从而对松驰标记理论的发展起了推进作用。但是,这些方法还局限于经验公式,兼容性系数并不是由严格的推导得出。Peleg[3]利用初等概率分析推导了松驰法的更新公式,消除了猜测的因素。由于迭代变换是基于近邻点之间的先验兼容性,而没有考虑到噪声的影响,就难以保证更新公式的收敛性。另一问题是计算量太大。例如,对于一$M\times M$的灰度级为L的图象,其可能的分布有L^{M^2}种,所以很难实现。

马尔科夫随机场(MRF)模型的研究方法近来得到了很大的发展,其目的是寻求最大后验概率(MAP)的全局组态。Geman和Geman[4]提出了能量函数的概念和模拟退火的随机方法,得到了用最大后验估计的并行算法。并且,由MRF-Gibbs等价性解决了松驰法中的计算问题。

2 概率松驰算法

Peleg[3]分析推导了一种新的概率松驰算法,但是其更新公式并没有考虑观测噪声的影响。现在我们用基于观测数据的迭代变换来改进其算法。

首先,我们假设观测值是条件独立:

$$P(y_i,y_j/x_i,x_j)=P(y_i/x_i,x_j)P(y_i/x_i,x_j),i\neq j \tag{1}$$

由于噪声u_i是相互独立,并独立于x_i,即有

$$P(y_i/x_i,x_j)=P(y_i/x_i) \tag{2}$$

所以式(1)写成

收稿日期:1991-04-02

$$P(y_i,y_j/x_i,x_j)=P(y_i/x_i)P(y_j/x_j),i\neq j \tag{3}$$

上述假设的含义是观测值只与标记的实际赋予值 x_i 有关。现在我们来推导算法的得出过程：

$$P(x_i,x_j/y_i,y_j)=\frac{P(y_i,y_j/x_i,x_j)P(x_i,x_j)}{P(y_i,y_j)}=\frac{P(y_i/x_i)P(y_j/x_j)P(x_i,x_j)}{P(y_i,y_j)}=\frac{P(x_i/y_i)P(y_i)}{P(x_i)}\cdot\frac{P(x_j/y_j)P(y_j)}{P(x_j)}\cdot\frac{P(x_i,x_j)}{P(y_i,y_j)}=P(x_i/y_i)P(x_j/y_j)r_{ij}\frac{P(y_i)P(y_j)}{P(y_i,y_j)} \tag{4}$$

其中，$r_{ij}=\frac{P(x_i,x_j)}{P(x_i)P(x_j)}$ 是兼容性系数。由于先验概率 $P(X)$ 是已知的，所以 r_{ij} 在迭代计算过程中保持不变。

由

$$\sum_{x_j}P(x_i,x_j/y_i,y_j)=P(x_i/y_i,y_j) \tag{5}$$

$$\sum_{x_i}\sum_{x_j}P(x_i,x_j/y_i,y_j)=1 \tag{6}$$

得到

$$P(x_i/y_i,y_j)=\frac{\sum_{x_j}P(x_i,x_j/y_i,y_j)}{\sum_{x_i}\sum_{x_j}P(x_i,x_j/y_i,y_j)}=\frac{\sum_{x_j}P(x_i/y_i)P(x_j/y_j)r_{ij}}{\sum_{x_i}\sum_{x_j}P(x_i/y_i)P(x_j/y_j)r_{ij}} \tag{7}$$

其中因子 $P(y_i)P(y_j)/P(y_i,y_j)$ 被抵销了。注意，现在的 $P(x_i/y_i,y_j)$ 只考虑了目标 v_j 对 v_i 的影响。记

$$Q_{ij}=\sum_{x_j}P(x_j/y_j)r_{ij} \tag{8}$$

Q_{ij} 可以被认为是近邻点 v_j 对 v_i 的支持强度。现在式(7)写成

$$P(x_i/y_i,y_j)=\frac{P(x_i/y_i)Q_{ij}}{\sum_{x_i}P(x_i/y_i)Q_{ij}} \tag{9}$$

把式(9)的 $P(x_i/y_i,y_j)$ 当作新的估计值来计算另一近邻点 v_k 对 v_i 的影响，得到

$$P(x_i/y_i,y_j,y_k)=\frac{\frac{P(x_i/y_i)Q_{ij}}{\sum_{x_i}P(x_i/y_i)Q_{ij}}Q_{ik}}{\sum_{x_i}\frac{P(x_i/y_i)Q_{ij}}{\sum_{x_i}P(x_i/y_i)Q_{ij}}Q_{ik}}=\frac{P(x_i/y_i)Q_{ij}Q_{ik}}{\sum_{x_i}P(x_i/y_i)Q_{ij}Q_{ik}} \tag{10}$$

由上式 j 和 k 的对称形式可知，当考虑到所有近邻目标对 v_i 的影响时，我们有

$$P(x_i/y_i,y_j,v_j\in N_i)=\frac{P(x_i/y_i)\prod_{v_j\in N_i}Q_{ij}}{\sum_{x_i}P(x_i/y_i)\prod_{v_j\in N_i}Q_{ij}} \tag{11}$$

假设，当 $y_j\notin N_i$ 时，赋予 x_i 的标记值不依赖于 y_j，即只考虑邻域 N_i 对目标 v_i 的影响。由此，$P(x_i/y_i,y_j,v_j\in N_i)=P(x_i/\boldsymbol{Y})$。记 $P^{(n)}(x_i/\boldsymbol{Y})$ 为 $P(x_i/\boldsymbol{Y})$ 在第 n 次迭代时的估计值，则概率松驰法的迭代更新公式为

$$P^{(n+1)}(x_i/\boldsymbol{Y})=\frac{P^{(n)}(x_i/\boldsymbol{Y})\prod_{v_j\in N_j}Q_{ij}^{(n)}}{\sum_{x_i}P^{(n)}(x_i/\boldsymbol{Y})\prod_{v_j\in N_i}Q_{ij}^{(n)}} \tag{12}$$

以上的迭代更新过程可以被描述如下：每一目标 v_i 利用 x_i 和其近邻点的分布的当前值来计算 x_i 的估计值，并用新的估计值来更新当前值，重复迭代，直到变化很小。以上的计算过程是并行的。

3　用于马尔科夫随机场(MRF)的随机松驰法

记 $\boldsymbol{X}_i=(x_1,\cdots x_{i-1},x_{i+1},\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{Z}_i$ 是与 N_i 对应的标记矢量。$\boldsymbol{\Omega}$ 是概率测度的构型空间，即 $\boldsymbol{\Omega}=\{\boldsymbol{\omega}=(\lambda_{x_1},\lambda_{x_2},\cdots,\lambda_{x_n}):\lambda_{x_i}\in\Lambda,1\leqslant i\leqslant n\}$。通常，事件 $\{x_1=\lambda_{x_1},x_2=\lambda_{x_2},\cdots,\lambda_{x_n}\}$ 简写为 $\{\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\omega}\}$。如果下面的条件满足，则称 $\boldsymbol{X}$ 是定义在 G 上的马尔科夫随机场：

(1) $P(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{\omega})\geqslant 0\qquad \boldsymbol{\omega}\in\boldsymbol{\Omega}$

(2) $P(x_i/\boldsymbol{X}_i)=P(x_i/\boldsymbol{Z}_i)\qquad 1\leqslant i\leqslant n$

其中，(2)的条件概率称为 MRF 的局部特性。

首先，我们推导用条件邻域概率 $P(\boldsymbol{Z}_i/\boldsymbol{Y})$ 来计算 $P(x_i/\boldsymbol{Y})$ 的表达式。

命题

$$P(x_i/\boldsymbol{Y})=\sum_{\boldsymbol{Z}_i}\frac{P(y_i/x_i)P(x_i/\boldsymbol{Z}_i)}{\sum_{x_i}P(y_i/x_i)P(x_i/\boldsymbol{Z}_i)}\cdot P(\boldsymbol{Z}_i/\boldsymbol{Y}) \tag{13}$$

其中，$P(\boldsymbol{Z}_i/\boldsymbol{Y})$ 表示矢量 $\boldsymbol{Z}_i$ 的条件联合密度。

证明由全概率公式，得到

$$P(x_i/\boldsymbol{Y})=\sum_{\boldsymbol{X}_i}P(x_i,\boldsymbol{X}_i/\boldsymbol{Y})=\sum_{\boldsymbol{X}_i}P(x_i/\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y})P(\boldsymbol{X}_i/\boldsymbol{Y}) \tag{14}$$

应用 Bayes 公式,有

$$P(x_i/\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y})=P(x_i/\boldsymbol{X}_i,y_i,\boldsymbol{Y}_i)=\frac{P(y_i/x_i,\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y}_i)P(x_i/\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y}_i)}{P(y_i/\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y}_i)}\tag{15}$$

由式(2)的得出过程知

$$P(y_i/x_i,\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y}_i)=P(y_i/x_i)\tag{16}$$

$$P(x_i/\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y}_i)=P(x_i/\boldsymbol{X}_i)\tag{17}$$

式(15)的分母可写成

$$\begin{aligned}P(y_i/\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y}_i)&=\\ \sum_{x_i}P(x_i,y_i/\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y}_i)&=\\ \sum_{x_i}P(y_i/x_i,\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y}_i)P(x_i/\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y}_i)&=\\ \sum_{x_i}P(y_i/x_i)P(x_i/\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y}_i)&\end{aligned}\tag{18}$$

联合式(14)~(18),并由 MRF 性质可得

$$\begin{aligned}P(x_i/\boldsymbol{Y})&=\\ \sum_{\boldsymbol{X}_i}\frac{P(y_i/x_i)P(x_i/\boldsymbol{X}_i)}{\sum_{x_i}P(y_i/x_i)P(x_i/\boldsymbol{X}_i)}\cdot P(\boldsymbol{X}_i/\boldsymbol{Y})&=\\ \sum_{\boldsymbol{X}_i}\frac{P(y_i/x_i)P(x_i/\boldsymbol{Z}_i)}{\sum_{x_i}P(y_i/x_i)P(x_i/\boldsymbol{Z}_i)}\cdot P(\boldsymbol{X}_i/\boldsymbol{Y})&\end{aligned}\tag{19}$$

记 $\boldsymbol{U}_i=\boldsymbol{X}_i-\boldsymbol{Z}_i$,则

$$\begin{aligned}P(x_i/\boldsymbol{Y})&=\sum_{\boldsymbol{Z}_i}\sum_{\boldsymbol{U}_i}\frac{P(y_i/x_i)P(x_i/\boldsymbol{Z}_i)}{\sum_{x_i}P(y_i/x_i)P(x_i/\boldsymbol{Z}_i)}\cdot P(\boldsymbol{U}_i,\boldsymbol{Z}_i/\boldsymbol{Y})=\\ &\sum_{\boldsymbol{Z}_i}\frac{P(y_i/x_i)P(x_i/\boldsymbol{Z}_i)}{\sum_{x_i}P(y_i/x_i)P(x_i/\boldsymbol{Z}_i)}\sum_{\boldsymbol{U}_i}P(\boldsymbol{U}_i,\boldsymbol{Z}_i/\boldsymbol{Y})=\\ &\sum_{\boldsymbol{Z}_i}\frac{P(y_i/x_i)P(x_i/\boldsymbol{Z}_i)}{\sum_{x_i}P(y_i/x_i)P(x_i/\boldsymbol{Z}_i)}P(\boldsymbol{Z}_i/\boldsymbol{Y})\end{aligned}$$

用式(13)来计算条件概率 $P(x_i/\boldsymbol{Y})$ 时,有2个未知的因素:MRF 的局部特性 $P(x_i/\boldsymbol{Z}_i)$,以及条件邻域概率。下面的定理使得我们能够用指定势函数的办法来求解局部特性。

定理　设 $\mathscr{R}$ 是一邻域系统,则 X 是对应于 $\mathscr{R}$ 的 MRF 的充要条件是 $\pi(\omega)=P(\boldsymbol{X}=\omega)$ 是对应于 $\mathscr{R}$ 的 Gibbs 分布。

定理的证明见[5]。对应于 $\{V,\mathscr{R}\}$ 的 Gibbs 分布是在构型空间上 Ω 的一个概率测度:

$$\pi(\omega)=\frac{\exp(-U(\omega)/T)}{\sum_{\omega}\exp(-U(\omega)/T)}\tag{20}$$

其中 T 是"温度",能量函数 $U(\omega)$ 有以下形式

$$U(\omega)=\sum_{C\in\boldsymbol{C}}V_C(\omega)\tag{21}$$

其中 C 是基团,即 C 中的任何一对目标都相邻,$\boldsymbol{C}$ 是基团集。势函数 $V_c(\omega)$ 取决于基团 C 中目标的标记值。由此,局部特征概率的求解可由势函数的形式给出

$$P(x_i/\boldsymbol{Z}_i)=\frac{P(x_i,\boldsymbol{Z}_i)}{P(\boldsymbol{Z}_i)}=\frac{P(x_i,\boldsymbol{Z}_i)}{\sum_{x_i}P(x_i,\boldsymbol{Z}_i)}=\frac{\exp(-\frac{1}{T}\sum_{C\in\boldsymbol{C}'}V_C(\omega))}{\sum_{x_i}\exp(-\frac{1}{T}\sum_{C\in\boldsymbol{C}'}V_C(\omega))}\tag{22}$$

其中 $\boldsymbol{C}'$ 是定义在目标集上 $\{v_i,N_i\}$ 的基团集。现把 $\boldsymbol{C}'$ 分成2个部分:

$$\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{C}_1\cup\boldsymbol{C}_2=\{C\in\boldsymbol{C},v_i\in C\}\cup\{C\in\boldsymbol{C},v_i\notin C\}\tag{23}$$

所以式(22)可写成:

$$\begin{aligned}P(x_i/\boldsymbol{Z}_i)&=\\ \frac{\exp(-\frac{1}{T}\sum_{C\in\boldsymbol{C}_1}V_C(\omega))\exp(-\frac{1}{T}\sum_{C\in\boldsymbol{C}_2}V_C(\omega))}{\sum_{x_i}\exp(-\frac{1}{T}\sum_{C\in\boldsymbol{C}_1}V_C(\omega))\exp(-\frac{1}{T}\sum_{C\in\boldsymbol{C}_2}V_C(\omega))}&=\\ \frac{\exp(-\frac{1}{T}\sum_{C\in\boldsymbol{C}_1}V_C(\omega))}{\sum_{x_i}\exp(-\frac{1}{T}\sum_{C\in\boldsymbol{C}_2}V_C(\omega))}&=\\ \frac{\exp(-\frac{1}{T}\sum_{C:v_i\in C}V_C(\omega))}{\sum_{x_i}\exp(-\frac{1}{T}\sum_{C:v_i\in C}V_C(\omega))}&\end{aligned}\tag{24}$$

注意包含有 v_i 的基团中的目标必定是 v_i 的近邻点。

由此可见,局部特性概率分布依赖于全局控制变量 T,称之为"温度"。算法在开始阶段采用较高的温度,以至迅速减小目标函数,并在迭代过程中逐渐降低温度,以避免陷入局部最小点。这种方法称为模拟"退火"过程,以达到后验分布的最小能量组态。Geman 在[4]中提出,如果在第 k 步迭代过程中的温度 $T(k)$ 满足

$$T(k)\geqslant\frac{c}{\log(1+k)}\tag{25}$$

其中 c 是不依赖于 k 的常数,则随着概率分布的收敛($k\to\infty$),全局组态趋向于能量最小。

现在,我们来解决用式(13)计算条件概率 $P(x_i/\boldsymbol{Y})$ 所存在的另一个问题,即求条件邻域概率 $P(\boldsymbol{Z}_i/\boldsymbol{Y})$。一个合理的方法是用边际概率密度 $P(x_i/\boldsymbol{Y})$ 来估计。在[11]中,我们得知联合概率密度 $P(\boldsymbol{Z}_i/\boldsymbol{Y})$ 的最大熵(ME)估计恰好是边际概率密度 $P(x_i/$

Y)之积。所以松驰更新公式可写为

$$P^{(n+1)}(x_i/Y) = \sum_{Z_i} \frac{P(y_i/x_i)P(x_i/Z_i)}{\sum_{x_i} P(y_i/x_i)P(x_i/Z_i)} \cdot P_{ME}^{(n)}(Z_i/Y) \quad (26)$$

其中,

$$P_{ME}^{(n)}(x_i/Y) = \prod_{v_j \in N_i} P^{(n)}(x_j/Y) \quad (27)$$

至此,我们得出了 2 种不同算法的迭代公式。

4　结束语

无论是目的还是方法,概率松驰法(PR)和随机松驰法(SR)都有很多相似之处。松驰标记法是对目标集进行标记指派,使得全局组态与上下文信息一致,并满足局部的限制。被称之为兼容性函数的局部限制一般由统计相关性决定。并行的迭代过程是一系列趋向于简单化和同一化的局部更新。然而,这两种方法有根本的不同之处。首先,大部分 PR 是属于经验式的,并没有严格的数学推导。其次,更重要的是,PR 的建模和算法都是非随机过程的,没有概率测度构型空间的概念。

参 考 文 献

1　Rosenfeld A, Hummel R A, Zuker S W. Scene labeling by relaxation operations. IEEE Trans. Syst. Man Cybern, 1976, SMC-6:420～453.

2　Hummel R A, Zuker S W. On the foundations of relaxation labeling processes. IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell. 1983, PAMI-5:267～287.

3　Peleg S. A new probabilistic relaxation scheme. IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell. 1980, PAMI-2:362～369.

4　Geman S, Gemini D. Stochastic relaxation, Gibes distributions, and the Bayesian restoration of images. IEEE Trans. Patt. Anal. Mach. Intell. 1984, PAMI-6:721～741.

5　Winkler G. Image Analysis, Random Fields and Dynamic Monte Carlo Methods, New York: Springer～Verlag, 1995.

6　Pelkowitz L. A continuous relaxation labeling algorithm for Markov random fields. IEEE Trans. Syst. Man Cybern. 1990, SMC～20:709～714.

戴剑彬,男,1972 年出生,清华大学自动化系统硕士研究生。主要研究方向:信号处理,图象处理,控制理论。国内核心刊物发表文章 2 篇。

张大力,1970 年毕业于清华大学电机系,1992 年获工学博士学位。现为清华大学自动化系副教授,研究方向为图象处理、模式识别与智能控制。

Relaxation Labeling in Image Analysis

Dai Jianbin, Zhang Dali

(*Automation Dept.*, *Tsinghua University Beijing*, *Beijing* 100084)

Abstract　Relaxation labeling refers to a class of algorithms for assigning a label to each object in a graph, by iterating a transformation until a fixed point is reached. A probabilistic relaxation method is analytically derived in this paper, and a stochastic relaxation algorithm is also carried out step by step. We employ the MRF-Gibbs equivalence to calculate the local characteristics of the MRF, and take the maximum entropy (ME) estimate as the conditional neighborhood probabilities. At the last section of the paper, the two distinct approaches are compared and contrasted.

Keywords　Probability relaxation, Stochastic relaxation, Markov random fields, Gibbs distribution, Maximum entropy